

Chapitre 2

EQUATIONS LOCALES D'ELECTROMAGNETISME

Plan

- I. Introduction
- II. Equations locales d'électromagnétisme
 - II.1.1 1^{ère} équation de Maxwell
 - II.1.2 2^{ème} équation de Maxwell
 - II.1.3 3^{ème} équation de Maxwell
 - II.1.4 4^{ème} équation de Maxwell
- III. Equations aux potentiels
 - III.1 Potentiel vecteur \vec{A}
 - III.2 Condition de Lorentz
 - III.3 Formule générale du champ électrique
- IV. Equations de propagation dans un milieu quelconque.
 - IV.1 Définition
 - IV.2 Equation de propagation des grandeurs physiques : $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}, V)$

I. Introduction

L'étude d'une OEM consiste à étudier l'évolution du couple champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans le temps et dans l'espace. Pour cela, on a besoin d'équations locales. Ces équations sont valables en tout point, à tout instant et dans n'importe quel milieu.

Mathématiquement, ces équations expriment les grandeurs $\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}$, et \mathcal{V} en fonction de leurs termes sources : ρ et \vec{j} . Ces termes sources sont responsables de la création des grandeurs citées ci-dessus. A savoir que ρ et \vec{j} sont respectivement la densité de charge volumique et la densité de courant électrique.

Pour établir ces équations, nous utilisons les outils mathématiques d'analyse vectorielle, qui ont été donnés dans le chapitre I.

II. Equation locales d'électromagnétisme

II 1. Equations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

- Ces équations sont dites locales, car on ne voit aucune forme intégrale. Il n'y a que des opérateurs (dérivés partielles), ce qui facilite énormément leur manipulation.
- Leur combinaison à permis de mettre en évidence la possibilité de la propagation du couple champ électromagnétique: (\vec{E}, \vec{B}) , et donc l'existence des Ondes électromagnétiques

II.1.1 Première équation de Maxwell

Une distribution de charge volumique de densité ρ (C/m³) crée un champ $\vec{E}(\vec{m})$ qui vérifie d'après le théorème de Gauss

$$\Phi(\vec{E})_{S_{\text{fermé}}} = \left(\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \right)_{S_{\text{fermé}}}$$

En appliquant les définitions du flux et de la charge électrique répartie en volume, on obtient :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds}_s = \frac{\iiint \rho \, d\tau_\tau}{\epsilon_0}$$

En appliquant le théorème de Green-Ostogradski, on obtient :

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{\tau} \rho \, d\tau$$

Ce qui donne :

$$\iiint_{\tau} \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon} \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}}$$

- Cette équation permet de remonter à la densité ρ , en mesurant point par point le champ \vec{E} .
- Elle s'appelle aussi l'équation locale du théorème de Gauss.

II.1.2 Deuxième équation de Maxwell.

On utilise la propriété fondamentale de \vec{B} : le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est nul

$$\Phi(\vec{B})_{S_{\text{fermé}}} = 0 \quad \forall \text{ le système et } \forall \vec{B}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div}(\vec{B}) \cdot d\tau = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

- Elle signifie que \vec{B} est à flux conservatif.
- Les lignes de \vec{B} sont toujours fermes, d'où la divergence nulle.

II.1.3 3^{ème} équation de Maxwell.

Hypothèse : Un circuit traversé par $\vec{B}(\mathcal{M}, t)$, il est donc traversé par un flux magnétique $\Phi(\mathcal{M}, T)$, d'où Auto-induction : \mathcal{E}_1 et un champ \vec{E}_m (à l'échelle microscopique) tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1: e = - \frac{d\Phi}{dt} \\ \text{et} \\ 2: e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}_{\text{Circuit "localisée"}} \text{ (microscopique)} \end{array} \right.$$

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B}(M, T) \cdot d\vec{s}$$

$$\xrightarrow{\text{théorème de Stokes}} \iint_S \text{rot}(\vec{E}_m) \cdot d\vec{s} = -\iint_S \frac{\partial (\vec{B})}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\iint_S (\text{rot}(\vec{E}_m) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{E}_m + \frac{\partial (\vec{B})}{\partial t} = \vec{0}$$

D'où $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faraday-Maxwell)

- \vec{E} est engendré par la variation de \vec{B} en fonction du temps.
- Elle s'appelle aussi l'équation locale de la loi de Faraday.
- Elle exprime l'auto-induction (cad : lorsque \vec{B} varie dans le temps, il engendre un champ \vec{E} qui déplace les charges d'où courant induit).

II.1.4 4^{ème} équation de Maxwell

1) Régime stationnaire

Il s'agit d'un régime dans lequel aucune des grandeurs physiques (courant I, champ magnétique B, champ électrique E,...) ne varie en fonction du temps.

Hypothèse : un circuit traversé par I, crée en tout point M $\vec{B}(M)$ tel que :

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \left(\frac{\Sigma I_s - \Sigma I_g}{I_{\text{total}}} \right)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{total}} \quad (\text{théorème en stationnaire})$$

On applique la loi d'électrocinétique qui donne le courant en fonction de sa densité \vec{J}

$$= \mu_0 * \iint_S \vec{J}(M) \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \iint_S (\text{rot}(\vec{B}) - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{B}) - \mu_0 \vec{J} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

C'est l'équation locale du théorème d'Ampère stationnaire.

2) Régime variable

Dans ce cas le système physique est traversé par des courants variables en fonction du temps.

$I(P, t)$ ou $(\vec{J}(P, t))$ crée $\vec{B}(M, t)$

Tel que :

$$\oint_C \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{tot}}(P, t)$$

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 \iint_S \vec{j}(P, t) \cdot \overrightarrow{ds} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu \cdot \vec{j}(P, t)$$

$$\text{Grâce à } \begin{cases} * \text{ conservation de la charge } \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{Equation de Maxwell 1 } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

On trouve que : $\vec{j}(P, t) = \vec{j}(P) + \epsilon \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$, que l'on injecte dans (1), on obtient :

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu \left(\vec{j}(P) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- Elle permet de remonter à la densité ρ , en mesurant point par point le champ \vec{E} .
- $\epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: densité de courant de déplacement (car si $\vec{E} = \vec{E}(t)$ alors, il déplace les charges électriques).

III. Equations aux potentiels :

III.1 Potentiel vecteur \vec{A}

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$$

On utilise l'équation : $\text{div} \vec{B} = 0$ (2^{ième} équation de Maxwell).

Or, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})) = 0 \forall \vec{u}$ (identité remarquable 1).

$$\Rightarrow \exists \text{ un vecteur } \vec{u} \equiv \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Unité : le potentiel vecteur A s'exprime en Tesla. Mètres (Tm)

Comment retrouver la direction et les variables de dépendance de \vec{A} , pour pouvoir le calculer par $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

$$\text{On utilise : } \begin{cases} * \text{ colinéarité avec I (et donc avec } \vec{j}) \Rightarrow \text{direction} \\ * \text{ la stratégie du système } \Rightarrow \text{variables} \end{cases}$$

Remarque :

Le potentiel vecteur \vec{A} a une expression qui le relie à la densité de courant \vec{j} . On l'utilise pour déterminer la direction de \vec{A} connaissant celle de \vec{j} . La formule est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\frac{\vec{j}}{PM} \right) d\tau$$

PM : distance entre le courant et M

μ_0 = perméabilité magnétique ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7} SI$)

On voit bien que A est colinéaire à J et donc au courant I.

Exemple 1 : fil infini

Le fil est de symétrie cylindrique et est traversé par un courant I vers les $z > 0$.

En appliquant la colinéarité du vecteur A au vecteur densité de courant, on trouve :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 = A_r \\ 0 = A_\theta \\ A_z \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z}$$

* Le fil étant infini, la composante du potentiel vecteur A_z ne dépend pas de z

* Le système est invariant par rotation d'un angle θ autour de l'axe Oz d'où A ne dépendra pas de θ , rotation d'un angle θ autour de \vec{Oz}

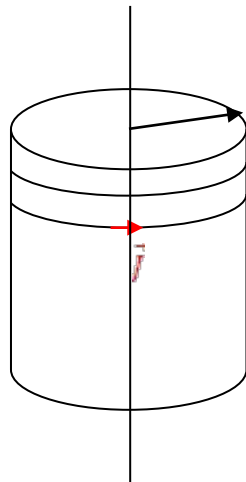
On obtient donc :

$$A_z = A_z(r)$$

Par ailleurs, on en déduit des simplifications dans l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques.

$$\vec{B} = \text{rot.} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z}$$

Exemple 2 Solénoïde



$$\vec{A} \text{ Colinéaire à } \vec{j} \Rightarrow \vec{A} \text{ tangentiel : } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z}$$

$L \gg R \rightarrow$ invariance en z , A_θ ne dépend pas de z , elle ne dépend donc que de r .

III.2 Condition de Lorentz

Elle exprime l'unicité du couple solution (\vec{A}, V) , tel que ces deux grandeurs doivent vérifier :

$$\text{div}(\vec{A}) - \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

III.3 Formule générale du champ électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On utilise l'équation 3 de Maxwell. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: (3)

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) : (5)$$

On injecte 5 dans 3 Or, $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{0}$, $\forall f$ (identité remarquable 2).

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \quad (f?)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

($f \equiv -V$) car quand $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$ (régime stationnaire) ($\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$)

$$\text{finalement: } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

remarque :

$$\text{On pose } \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) + \vec{E}_i$$

\vec{E}_i = champs induit : champ créé quand $I = I(t)$ et $\vec{A} = \vec{A}(t)$

Conclusion

On résume les 7 équations locales d'électromagnétisme qui seront utilisées dans la suite des chapitres afin d'étudier les O.E.M.

$$\begin{cases} \text{Equations de Maxwell} \left\{ \begin{array}{l} 1: \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \text{ (Gauss Maxwell)} \\ 2: \text{div } (\vec{B}) = 0 \text{ (flux conservatif)} \\ 3: \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Faraday-Maxwell)} \\ 4: \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu \cdot \vec{j} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (Ampère-Maxwell)} \end{array} \right. \\ \text{Equations aux potentiels} \left\{ \begin{array}{l} 5: \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \text{ (Potentiel vecteur } \vec{A}) \\ 6: \text{div } \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ (Condition de Lorentz)} \\ 7: \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial (\vec{A})}{\partial t} \text{ (formule de } \vec{E}) \end{array} \right. \end{cases}$$

IV. Equations de propagation.

IV.1 Définition

L'équation de propagation d'une fonction quelconque f est :

$$\Delta f - K \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g$$

Où K est une constante et g représente le terme source.

Δf : représente la variation spatiale de f.

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$: représente la variation temporelle de f.

Le terme source est fonction des grandeurs locales du milieu dans lequel se propage l'onde de fonction f.

Exemples :

- Si la propagation se fait dans le milieu vide alors $g = 0$.
- Pour une O.E.M g dépend des grandeurs responsables de la création du couple champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et qui sont respectivement la densité de charge volumique et la densité de courant (ρ, \vec{J})

IV.2 Equation de propagation des grandeurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}, V)$

Par combinaison des 4 équations de Maxwell et d'une identité remarquable d'analyse vectorielle, on trouve les équations de propagation pour un milieu quelconque :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ \Delta \vec{B} - \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot}(\vec{J}) \\ \Delta \vec{A} - \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{J} \\ \Delta V - \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

Remarque :

Dans le milieu vide ($\rho = 0 ; J = 0 ; \mu = \mu_0 ; \epsilon = \epsilon_0$), on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{E} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta \vec{A} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta V - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \text{ Appelées équations de D'Alembert}$$

IV.1 Equation de propagation de \vec{E} :

On utilise l'identité remarquable 4 qui est donnée par : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{v}) - \Delta \cdot \vec{v}$

Utiliser la 3^{ème} équation de maxwell : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) \downarrow$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \cdot \vec{J} + \mu \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) - \Delta \cdot \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\vec{J}) - \mu \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \cdot \vec{E} - \frac{\mu \epsilon}{K} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) - \mu \frac{\partial}{\partial t}(\vec{J})$$

$g(\rho, \vec{J})$
 terme source car:
 ρ et \vec{J} sont les grandeurs qui créent \vec{E}
 $\left\{ \begin{array}{l} \rho = \text{densité de charge} \\ \vec{J} = \text{densité de courant} \end{array} \right.$

IV.2 Equation de propagation de \vec{B}

On utilise l'identité remarquable 4 et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})$: 4^{ème} équation de Maxwell

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{J}) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\underbrace{\text{div}(\vec{B})}_{\substack{2^{\text{ème}} \text{ eq M}}} \right) - \Delta \cdot \vec{B} = \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{J}) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \cdot \vec{B} - \frac{\mu \epsilon}{K} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{-\mu \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{J})}{g(\vec{J}) \text{ : terme source pour } \vec{B}}$$

(Logique car \vec{J} crée \vec{B})

IV.3 Equation de propagation du potentiel électrique V (M, t)

On utilise la septième équation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial(\vec{A})}{\partial t}$ (formule de \vec{E})

$$\underbrace{\text{div}(\vec{E})}_1 = -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\text{div}(\vec{A})}_{\epsilon} \right)$$

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\Delta(V) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

$$\Delta V - \frac{\mu \epsilon}{K} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$g(e)$: terme source de V(M, t)