Propagation d’ondes électromagnétiques dans le vide

Plan

A.Zellagui-Tabbi

I. Définition d'une onde

Une onde est une perturbation ou déformation qui se déplace (ou qui se propage) d'un point à un autre, en transportant de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Exemples :

- Onde mécanique (le long d'un ressort)

  C'est une déformation qui se propage le long de l'axe du ressort, il s'agit donc **d'une onde matérielle et longitudinale.**

- Onde à la surface de l'eau

  Lorsqu'on jette une pierre sur la surface de l'eau, il se forme des vagues. Cette déformation de l'eau est perpendiculaire à l'axe de propagation, l'onde est donc **matérielle mais transversale**.

- Onde le log d'une colonne de gaz. (Onde sonore)

  On comprime un gaz en exerçant une force extérieur sur le piston. La déformation du nombre de molécules se propage le long de la colonne de gaz. L'onde est donc **matérielle et longitudinale**.

- Onde électromagnétique (O.E.M)

  C'est une déformation du couple champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ dans le temps et dans l'espace. L'onde est donc **non matérielle**.

II. Equation de D'Alembert

Ce sont les équations de propagations dans le vide déjà établies dans le chapitre 2.

Dans le milieu vide ($\rho = 0$; $J = 0$; $\mu = \mu_0$; $\varepsilon = \varepsilon_0$), on obtient donc :

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta\vec{B} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Appelées équations de D'Alembert

II.1 Equation de D'Alembert à une dimension

Pour une fonction f(x), le Laplacien de f s'écrit :

$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ Car la fonction ne dépend que de la variable x

Ce qui donne pour l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Le coefficient : $\mu_0 \varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'un carré d'une vitesse (en m^{-2}/s^{-2})

On pose donc :

$c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$; Où c est la célérité, la vitesse de propagation dans le vide

On a $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} S.I$ et $\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi} S.I$, ce qui donne $c = 3.10^8 m/s$

II.2 Solution générale de l'équation de d'Alembert

La solution générale de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ est :

$$f(x,t) = F(x - c.t) + G(x + c.t)$$

F(x – c.t): représente une onde progressive qui se propage avec une vitesse $\overline{V} = c$ (vers les x > 0)

G(x + c.t): représente une onde régressive qui se propage avec une vitesse $\overline{V} = -c$ (vers les x < 0)

III. Onde plane dans le milieu vide et ses propriétés

III.1 Définition

C'est une onde dont la surface d'onde est un plan.

Une surface d'onde est l'ensemble des points où le champ électrique (ou magnétique) a même intensité, même direction et même sens en tout point. Pour une onde se propageant le long de l'axe Ox, tous les plans d'équations: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$,….. Sont les surfaces d'onde, ce sont des plans parallèles au plan (yoz) et qui sont perpendiculaires à l'axe de propagation.

Remarque :

A la base les ondes électromagnétiques sont sphériques (surfaces d'ondes = sphères), mais il suffit de se placer loin de la source pour que la surface d'onde devient plane, ainsi on peut considérer l'onde comme étant plane.

III.2 Propriétés d'ondes planes dans le milieu vide

Grâce aux équations de Maxwell, on montre que pour une onde se propageant vers les x > 0, où les champs électrique et magnétique sont de la forme : E(x – ct) et B(x – ct), on a les propriétés suivantes :

1) $\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses (chacun d'eux est perpendiculaire à l'axe de propagation)
2) $\vec{E} \perp \vec{B}$
3) $E = cB$ (valable en module)
4) $(\vec{E}, \vec{B}, axedepropagation)$ est un trièdre direct

IV. Ondes planes sinusoïdales dans le milieu vide.

IV.1 Définition

Une onde plane qui se propage vers les x > 0 a un champ électrique de la forme : E(x, t) = E(x – ct), si en plus l'onde est sinusoïdale, le champ électrique sera de la forme : $E(x, t) = E_0.\cos(k(x – ct))$.
E_0 est l'amplitude du champ et k(x – ct) est la phase de l'onde.

Remarque :

Tout signal périodique peut être décomposé en une somme de fonctions sinusoïdales, en plus de cela on peut utiliser la notation complexe pour faciliter les calculs, d'où l'intérêt d'étudier les ondes planes sinusoïdales.

IV.2 Grandeurs caractéristiques des O.P.P.S

O.P.P.S : Ondes planes progressives sinusoïdales.

a) Période T et fréquence f

La période T est le temps au bout duquel le champ électrique (ou magnétique) repasse par le même état vibratoire. E(x- ct) = E(x – c(t+T))

La fréquence vérifie :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

f s'exprime en s^{-1} ou en Hertz : Hz

b) Pulsation ω

La pulsation représente la vitesse angulaire du vecteur « tournant » associé au champ sinusoïdal $E_0.\cos(k(x – ct))$.

On obtient :

$$\boxed{\omega = \Delta\alpha / \Delta t = 2.\pi / T = 2\pi f}$$

c) Longueur d'onde λ

Elle représente la période spatiale : distance au bout de laquelle le champ 'électrique ou magnétique repasse par le même état vibratoire. C'est la distance ''parcourue'' par l'onde pendant une période T à la vitesse c.

$$\boxed{\lambda = c.T = \frac{c}{f}}$$

d) Nombre d'onde k

Ce nombre représente le nombre d'oscillation qu'effectue l'onde pendant un cycle de 2π.

On a : $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(k(x - ct)) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$

Ce qui donne :

$$\boxed{k.c = \omega}$$

En fonction de la longueur d'onde :

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

k s'exprime en rad/m

Remarque :

On parlera plus tard du vecteur d'onde $\vec{k}$ dont le module est $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, et dont la direction et le sens sont ceux de l'axe de propagation.

V. Notation complexe et généralisation

V.1 Notation complexe

Grâce à la notation complexe la manipulation des 7 équations locales d'électromagnétisme, ainsi que les équations de propagation devient très simple.

En notation complexe les grandeurs champ électrique, champ magnétique, potentiel vecteur et le potentiel électrique s'écrivent : (pour une O.P.P.S qui se propage vers les x > 0).

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0 .e^{i(kx-\omega t)} \\ \hat{\vec{B}} = \hat{\vec{B}}_0 .e^{i(kx-\omega t)} \\ \hat{\vec{A}} = \hat{\vec{A}}_0 .e^{i(kx-\omega t)} \\ \hat{V} = \hat{V}_0 .e^{i(kx-\omega t)} \end{cases}$$

Les vraies grandeurs physiques représentent les parties réelles des grandeurs données ci-dessus.

IV.2 Généralisation

Pour une O.P.P.S qui se propage dans le vide (ou dans l'air) et dans une direction quelconque, le vecteur d'onde $\vec{k}$ a trois composantes (k_x, k_y, k_z) ce qui permet de réécrire les grandeurs ci-dessus comme :

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0 . e^{i(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)} \\ \hat{\vec{B}} = \hat{\vec{B}}_0 . e^{i(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)} \\ \hat{\vec{A}} = \hat{\vec{A}}_0 . e^{i(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)} \\ \hat{V} = \hat{V}_0 . e^{i(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)} \end{cases}$$

Où : $\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$: phase spatiale de l'onde.

Les grandeurs réelles deviennent :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 . \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 . \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ \vec{A} = \vec{A}_0 . \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_1) \\ V = V_0 . \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Remarque :

- Une O.P.P.S qui se propage dans le plan (xoy), son champ électrique s'écrit :

$$\vec{k}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{et } \vec{E}(x, y, t) = \vec{E}_0 \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$$

- Une O.P.P.S qui se propage vers les z > 0 vérifie :

$$\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \text{Et } \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(k_z z - \omega t)$$

IV.3 Conséquence de la notation complexe

A l'aide des définitions des opérateurs, et aux écritures des grandeurs en notation complexe données ci-dessus on montre que :

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla}.\vec{E} = i\vec{k}.\vec{E}$$
$$\vec{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$
$$\vec{grad}(V) = \vec{\nabla}(V) = i\vec{k}(V)$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega.\vec{E}$$

On en conclue donc les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} = -i\omega \\ \vec{\nabla} = i\vec{k} \end{array}}$$

Remarque :

En tenant compte des relations que vérifient les opérateurs cités ci-dessus.

- Les équations locales d'électromagnétisme (chapitre 1) en notation complexe s'écrivent :

1) $i\vec{k}.\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$
2) $i\vec{k}.\vec{B} = 0$
3) $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$
4) $\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu\vec{J} - i\omega\mu\varepsilon\vec{E}$
5) $i\vec{k} \wedge \vec{A} = \vec{B}$
6) $i\vec{k}.\vec{A} - i\omega\mu\varepsilon V = 0$
7) $\vec{E} = -i\vec{k}.V + i\omega\vec{A}$

- Les équations de propagation dans le vide (chapitre 2) deviennent :

$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}).\vec{E} = \vec{0}$$
$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}).\vec{B} = \vec{0}$$
$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}).\vec{A} = \vec{0}$$

$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}).V = 0$$