CHAPITRE IV

ONDES ELECTROMAGNETIQUES ET ENERGIE

PLAN

I. Introduction

II. Equation fondamentale de l'énergie électromagnétique et bilan énergétique

III. Application à une onde plane sinusoïdale dans le vide
   1. Expression du vecteur de Poynting
   2. Expression de la densité d'énergie U
   3. Interprétation physique du vecteur de Poynting.

IV. Intensité lumineuse

V. Puissance lumineuse

VI. Caractères ondulatoire et corpusculaire de l'onde
   1. Caractère ondulatoire
   2. Caractère corpusculaire
      2.1 Energie et quantité de mouvement d'un photon
      2.2 Pression de radiation des photons

A. Zellagui-Tabbi

I) Introduction

L’objectif de ce chapitre est de montrer dans un premier temps, que l’énergie d’une O.E.M est interprétée par une équation fondamentale, résumant le bilan énergétique global. Ce bilan montre que la variation d’énergie électromagnétique au cours du temps est répartie entre l’énergie de rayonnement et l’énergie dissipée par effet Joule, lors de l’interaction entre l’onde et les éléments du milieu, dans lequel elle se propage. On verra comment calculer l’intensité et la puissance lumineuses d’une O.E.M.
Dans un second temps, on verra les deux aspects d’une O.E.M : qui sont l’aspect ondulatoire, (utilisé pour l’étude des interférences, de l’holographie, de la diffraction…), et l’aspect corpusculaire, où l’onde est considérée comme un paquet de photons se propageant à la même vitesse que le couple champ électromagnétique. Ce dernier aspect est utilisé dans le domaine de la physique atomique et quantique. L’énergie des photons et leur quantité de mouvement. Nous permettront le calcul la pression de radiation.

II) Equation fondamentale de l’énergie électromagnétique et bilan énergétique

1. Equation fondamentale de l’énergie électromagnétique

Les vecteurs champs électrique et magnétique d’une onde véhiculent les énergies électrique et magnétique qui sont respectivement :

$$\boxed{\begin{cases} W_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon \iiint_\tau E^2 d\tau \\ W_m = \dfrac{1}{2\mu} \iiint_\tau B^2 d\tau \end{cases}} \qquad \text{Avec:} \boxed{\begin{cases} \omega_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon . E^2 \\ \omega_m = \dfrac{1}{2\mu} B^2 \end{cases}}$$

We et Wm sont des énergies exprimées en Joule, par conséquent ω_e et ω_m sont respectivement les densités d’énergie électrique et magnétique exprimées en J/m^3.

Par ailleurs, on a ce champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ vérifie les équations de Maxwell qui sont vérifiées :

1) $div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$
2) $div(\vec{B}) = 0$
3) $\vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4) $rot(\vec{B}) = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Equations valables pour un milieu quelconque, et le type d’onde est aussi quelconque.

La combinaison des équations (3) et (4) de Maxwell, et tenant compte d'une identité d'analyse vectorielle :

$$div(\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2) = rot\vec{}(\vec{U}_2).\vec{U}_1 - rot\vec{}(\vec{U}_1).\vec{U}_2$$ (Pour deux vecteurs quelconques $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$.

On obtient l'équation fondamentale de l'énergie électromagnétique donnée par :

$$div(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}) = -\vec{J}.\vec{E} - \frac{\partial(\omega_e + \omega_m)}{\partial t} \quad (*)$$

Remarques

1) On pose : $\begin{cases} \vec{S} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \\ U = \omega_e + \omega_m \end{cases}$

Le vecteur $\vec{S}$ est appelé le vecteur de Poynting (trouvé par le physicien…………), et U la densité d'énergie électromagnétique (en J/m^3).

2) Sachant que l'opérateur (div) s'exprime en m^{-1}, et le terme ($\frac{\partial U}{\partial t}$) en J/m^{3}s, on en déduit que div ($\vec{S}$) s'exprime en J/m^{3}s, ce qui donne le vecteur de poynting S en J/m^{2}s. Le vecteur $\vec{S}$ représente donc **la densité surfacique de puissance (Watts/m^2).**

2. Bilan énergétique et interprétation

En multipliant l'équation (*) par un élément de volume dW et en intégrant sur le volume τ, on obtient l'équation suivante :

$$\iiint_\tau div(\vec{S}).d\tau = -\iiint_\tau \vec{J}.\vec{E} - \frac{\partial W}{\partial t}$$

En utilisant le théorème de Green Ostrogradski, cette dernière équation se réécrit comme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oiint_\Sigma \vec{S}.d\vec{\Sigma} - \iiint_\tau \vec{J}.\vec{E}$$

(1) (2) (3)

Le terme (1) représente la variation au cours du temps de l'énergie électromagnétique totale.
Le terme (2) représente la puissance dissipée par effet Joule.
Le terme (3) représente la puissance perdue par rayonnement.

III) Application à l'onde plane et sinusoïdale

1. Expression du vecteur de Poynting

On suppose une onde progressive plane qui se propage dans le vide avec une vitesse c e dans la direction des x > 0

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_0 \cos(kx-\omega t)\\ \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_0 \cos(kx-\omega t)\end{aligned}}$$

Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E.B}{\mu_0}\vec{e}_x \text{, or } \begin{cases} E = c.B \\ \mu_0.\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\vec{S} = \varepsilon_0.c.E^2.\vec{e}_x$$

Où l'amplitude du vecteur de Poynting sera : $S_0 = \varepsilon_0.c.E_0^2$

Remarque

Le vecteur $\vec{S}$ est perpendiculaire au champ électromagnétique, il est donc selon la direction de propagation, cela signifie que la densité de puissance de l'onde se propage dans la même direction que l'onde (logique !).

2. Expression de la densité d'énergie U

On sait que pour une onde électromagnétique quelconque on a $U = \omega_e + \omega_m$ avec $\omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon.E^2$ et $\omega_m = \frac{1}{2\mu}.B^2$

$$U = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0.E^2 + \frac{1}{2\mu_0}.B^2 \text{, or } \begin{cases} E = c.B \\ \mu_0.\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2} \end{cases}$$

On obtient donc :

$$U = 2\omega_e = 2\omega_m = \varepsilon_0.E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

3. Interprétation physique du vecteur de Poynting

On récapitule les résultats obtenus plus haut, pour une O.E.M.P.P.S qui se propage dans le vide, ou dans l'air :

$\begin{cases} \vec{S} = \varepsilon_0 c.E^2 \vec{u} \\ U = \varepsilon_0 E^2 \end{cases}$ $\vec{u}$: Vecteur unitaire de la direction de propagation

On peut donc écrire $\vec{S} = U.\vec{c}$ où $\vec{c} = c.\vec{u}$: vecteur vitesse de propagation.

Par ailleurs, en électrocinétique, un flux de particules de même charge q, et de même vitesse moyenne $\vec{v}$, donne une densité de courant $\vec{J}$ d'expression :
$\vec{J} = n.q.\vec{v} = \rho.\vec{v}$

Finalement : $\vec{S} = U.\vec{c}$ et $\vec{J} = \rho.\vec{v}$
Deux formules analogues, où la première correspond au mouvement des charges électriques, et la seconde au « mouvement » ou propagation de la densité d'énergie.
Le vecteur $\vec{S}$ est donc appelé le courant d'énergie électromagnétique.

IV) Intensité lumineuse : I

L'intensité lumineuse est la valeur moyenne dans le temps, de la densité surfacique de puissance de l'onde. Cette intensité est mesurée à d'un appareil qui intègre cette densité de puissance sur une période T
Par définition: $I = \langle S \rangle_T$; où S est le module du vecteur de Poynting.

$$I = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle_T = \langle \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(k.x - \omega.t) \rangle_T$$

En appliquant la définition de la valeur moyenne :

$$I = \frac{1}{T}(\varepsilon_0 c E_0^2)\int_0^T \cos^2(k.x - \omega.t)dt$$

Or la valeur moyenne de $\cos^2(f(t))$ est de 1/2, ce qui donne pour l'intensité lumineuse :

$$I = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} = \frac{S_0}{2}$$ Et qui s'exprime en Watts/m^2, ou bien en J/s.m^2.

V) Puissance : P

La puissance d'une O.E.M est le flux de l'ensemble des vecteurs de Poynting $\vec{S}$ traversant une surface quelconque Σ.

$P = \iint_{\Sigma} \vec{S}.d\vec{\Sigma}$ Où $d\vec{\Sigma}$ est le vecteur élément de surface

Exemples d'application

1) Onde radio

a) Source radio très proche de la terre

La puissance de rayonnement à la distance R est :

$$Pui = S(R,t).4\pi.R^2$$

b) Source s'onde radio très loin de la terre

La puissance de rayonnement à la distance R est :

$$Pui = S(R,t).2\pi.R^2$$

2) Onde lumineuse d'un faisceau laser de rayon R et d'axe Oz

La puissance de rayonnement est :

$$Pui = S(z,t).\pi.R^2$$

VI) Caractère ondulatoire et corpusculaire d'une O.E.M.

1. Caractère ondulatoire

Dans ce cas l'onde est considérée comme un couple de champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t);\vec{B}(M,t))$ vérifiant les équations de propagation dans le vide, de la forme :

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}.\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta\vec{B} - \dfrac{1}{c^2}.\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

A cette propagation sont associés :

* le vecteur de Poynting $\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu}$, qui véhicule la puissance surfacique

* la densité d'énergie volumique : $U = \dfrac{1}{2}\varepsilon.E^2 + \dfrac{1}{2\mu}B^2$

2. Caractère corpusculaire

Dans ce cas le rayonnement électromagnétique est considéré comme un flux de photons : particules sans masse, ayant de l'énergie et de la quantité de mouvement.
L'énergie de l'onde est discontinue, on dit qu'elle est quantifiée. Elle se présente sous forme de « quanta », qui signifie « paquet ». L'énergie d'un photon est appelée donc : quantum d'énergie

2.1) Mise en évidence de l'aspect corpusculaire et des photons

En 1900 Max Planck a formulé l'hypothèse des quanta, ce qui a conduit à l'expression de l'énergie d'un photon. Cette énergie ne dépend que de sa fréquence. Cette hypothèse a été confirmée par l'expérience de Franck-Hertz, interprétée par A. Einstein (en 1905), ce qui lui a valu le prix Nobel

a. Expérience

Dans une cellule vide, on éclaire une cathode métallique avec une lumière, de fréquence variable. Les électrons arrachés sont collectés sur une anode A. La mesure du courant I donne le taux d'électrons arrivant de la cathode C

b. Interprétation :

La lumière arrache des électrons de la cathode, ces particules sont conduites à l'anode grâce au potentiel V.

Au départ, on applique un potentiel V_0 négatif afin de freiner les électrons arrachés, avant de les conduire par la suite vers l'anode.

Sur la courbe enregistrée I = f(V), pour une fréquence donnée de la lumière envoyée, le courant augmente et atteint un palier de saturation. A la saturation tous les électrons (susceptibles d'être arrachés) quittent le métal (cathode).

Lorsque le flux lumineux Φ augmente, le nombre de photons augmente, ainsi le nombre d'électrons augmente. Ce qui explique le courant I_s qui augmente.

c. Validation de la loi de Planck : $E = h.\nu$

On a l'énergie de la lumière qui arrive sur la cathode qui vérifie :

$$E_{lumière} = E_c + W_0 \quad (1)$$

Où W_0 représente l'énergie de liaison propre au métal de la cathode

Or $E_c = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (2)$

v_i représente la vitesse initiale des électrons (au niveau de la cathode)

Par ailleurs on a :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = -\Delta E_p = e.V$$ (Théorème d'énergie cinétique)

Avec, $\Delta E_p = -(q_e.V) = e.V$ (énergie potentielle électrique)

Pour V = V_0, on a $v_f = 0$, ce qui donne :

$$V_0 = -\frac{1}{2e}m.v_i^2 \quad (3)$$

En remplaçant (2) et (3) dans (1), on obtient :

$$E_{lumière} = -e.V_0 + W_0$$

Mesurant sur la courbe V_0 et connaissant W0 et la fréquence ν, on vérifie bien que

$E_{lumière} = h.\nu$ (loi de Planck validée)

2.2) Energie et quantité de mouvement des photons

a. Energie des photons

L'expression de l'énergie d'un photon a été élaboré par Max. Planck, elle est donnée par : $E = h.\nu$, h est la constante de Planck

$$\text{Où } \begin{cases} h = 6{,}62.10^{-34}\, J.s \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{cases}$$

Sachant que $\lambda = c.T = c.\frac{2\pi}{\omega}$, alors on obtient $E = h.\frac{\omega}{2\pi}$

En posant : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

On obtient : $E = \hbar.\omega.$

b. Quantité de mouvement d'un photon

En physique classique, un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ est animé d'une quantité de mouvement $\vec{p}$ donnée par :

$$\vec{p} = m.\vec{v}$$

Les photons n'ayant pas de masse, l'expression de la quantité de mouvement est donnée par la théorie quantique, elle est donnée par :

$p = \frac{h}{\lambda}$, sachant que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ où k est le nombre d'onde, on obtient : $p = \hbar.k$

Cette dernière expression peut être donnée sous forme vectorielle par :

$$\vec{p} = \hbar.\vec{k}$$

2.3) Pression de radiation

En mécanique, on défini la pression comme étant le rapport entre la force F et la surface S qui subit cette la force

$p_r = \dfrac{F}{S}$,

On peut aussi écrire :

$p_r = \dfrac{dF}{dS}$ (En Pascales : Pa)   (1)

Par ailleurs : $F = m.\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(mv)}{dt} = \dfrac{dp}{dt}$ (2)

(Loi de Newton : la force mesure la variation de la quantité de mouvement au cours du temps)

(2) donne $dp = F.dt$

Que l'on dérive une seconde fois pour avoir dF

$$d^2p = dF.dt$$

En tenant compte de (1), on obtient :

$$d^2p = p_{res}.dS.dt$$

Démonstration pour le cas des photons :

Après calcul on trouve que la pression exercée par des photons (ou pression de radiation) est donnée par :

a) Pour un miroir parfaitement réfléchissant

$$p_{res} = 2.U$$

b) Pour une lame parfaitement transparente

$$p_{res} = U$$

c) Pour un obstacle quelconque

$$p_{res} = (2-t).U = (1+r).U$$

Où r et t sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission ($r + t = 1$), et U est la densité d’énergie électromagnétique.