Chapitre V

Propagation des O.E.M dans un milieu matériel

Plan

A. Tabbi-Zellagui

I) Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement de l'onde lors de son interaction avec la matière. L'interaction se fait principalement avec les électrons du milieu, car les ions sont souvent supposés immobiles, du fait de leur importante masse, comparée à celle des électrons ($m_i \approx 2.10^3\ m_e$).

En effet, lorsque l'onde entre dans le milieu, le mouvement des particules se trouve modifié, ce qui provoque une modification des constantes diélectrique et magnétique (µ et ε). La vitesse de phase de l'onde varie donc en fonction de la pulsation ω. Il apparaît en effet une autre vitesse appelée vitesse de groupe, qui représente la vraie vitesse de l'onde, autrement dit la vitesse de l'énergie de l'onde.

Grâce aux équations de Maxwell, on établit l'équation de dispersion $k^2 = f(\omega^2)$, dont l'étude de ses solutions montre qu'il y a trois comportement possibles pour l'onde :

- Onde progressive sans atténuation
- Onde amortie
- Onde évanescente

Ces comportements sont dus aux échanges d'énergie entre l'onde et le milieu, et qui dépendent de la nature de celui-ci.

II) Equation de dispersion et solutions

II-1) Equations de Maxwell dans un milieu matériel neutre

Pour tout le chapitre, on suppose que l'onde envoyée dans le milieu est une O.E.M.P.P.S, de pulsation ω, ce qui nous permet d'utiliser la notation complexe. A savoir que les opérateurs spatio-temporels s'écrivent : ($\vec{\nabla} = i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$)

1) $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$ en notation complexe 1) $i\vec{k}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

2) $div(\vec{B}) = 0$ 2) $i\vec{k}.\vec{B} = 0$

3) $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 3) $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}$

4) $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 4) $i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu\vec{J} - i\mu\varepsilon\omega\vec{E}$

Pour une étude complète de l'interaction entre l'onde et la matière, on doit ajouter aux équations de Maxwell, les équations suivantes:

$\vec{F}_e = q.\vec{E}$: Force électrique due sous l'effet du champ E de l'O.E.M.

$\vec{F}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$: Force magnétique due au champ magnétique de l'O.E.M.

$\vec{J} = \gamma.\vec{E}$: Loi d'Ohm généralisée, où γ est la conductivité du milieu

II-2) Equation de dispersion

Après combinaison des équations de Maxwell (3) et (4) on obtient une relation entre k^2 et ω^2 :(équation de dispersion), de la forme suivante :

$$k^2 = \omega^2.\mu(\varepsilon + i\frac{\gamma}{\omega}) \quad *$$

Où μ, ε, et γ sont respectivement la perméabilité magnétique, la permittivité électrique, et la conductivité du milieu.

Remarque :

Dans le milieu vide on a : $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\gamma = 0$, l'équation * devient donc ;

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{(sachant que : } \mu_0.\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\text{)}$$

C'est l'équation de dispersion dans le vide, on retrouve bien une relation linéaire ente k et ω, on dit que le milieu vide est un milieu non dispersif, autrement dit toutes les longueurs d'onde se propagent à la même vitesse $c = 3.10^8$ m /s.

II.3 Solutions de l'équation de dispersion

On considère une O.E.M.P.P.S d'amplitude E0 et de pulsations ω. Cette onde se propage dans l'air et entre par la suite dans un milieu de conductivité γ. La direction de propagation est l'axe Ox. Le champ électrique de l'onde s'écrit donc en notation complexe :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0.e^{i(k.x-\omega.t)}$$

Sachant que le nombre d'onde k peut s'écrire comme :

$$k = k' + ik''$$

Où k' et k″ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de k.

On distingue trois cas possibles :

1er cas : $k^2 > 0$

Le nombre d'onde k est donc réel, $k = k'$; le champ électrique dans le milieu devient :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0.e^{i(k'.x-\omega.t)}$$

Dont la partie réelle est :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0.\cos(k.x - \omega.t)$$; Il s'agit donc d'une **onde progressive.**

Schéma

2ème cas : $k^2 < 0$

Le nombre d'onde k est donc imaginaire pur, $k = ik"$; le champ électrique dans le milieu devient :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0.e^{i(ik".x-\omega.t)}$$

Dont la partie réelle est :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0.e^{-k".x}\cos(\omega.t)$$

La partie propagation (x-v.t) a disparue, Il s'agit donc d'une **onde évanescente ou atténuée.**

Schéma

<u>3ème cas</u> : k^2 complexe

Le nombre d'onde k s'écrit donc comme : $k = k' + ik''$; le champ électrique dans le milieu devient :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 . e^{i((k'+ik'').x - \omega.t)} = \vec{E}_0 . e^{-k''.x} . e^{i(k'x - \omega.t)}$$

Dont la partie réelle est :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 . e^{-k''.x} \cos(k'.x - \omega.t)$$

Il y a de la propagation et de l'atténuation, Il s'agit donc d'une **<u>onde amortie.</u>**

<u>Schéma</u>

<u>III) Vitesse de phase, vitesse de groupe et indice de réfraction</u>

1) **<u>Vitesse de phase</u>** :

Cette vitesse n'a pas une signification physique, elle représente la vitesse qui apparait dans la phase : (k.x-ω.t) de l'onde

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(k.x - \omega.t) = \vec{E}_0 \cos(k(x - \frac{\omega}{k} t)) = \vec{E}_0 \cos(k(x - v_\varphi t))$$

Où $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$

La vitesse de phase ne doit pas vérifier la limite relativiste, à savoir $v_\varphi \le c$, car dans certains cas elle peut dépasser la vitesse de la lumière c

2) Vitesse de groupe

a) Signification

C'est la vitesse de l'énergie de l'onde, et qui doit donc être inférieure où égale à la vitesse de la lumière dans le vide.

On montre par le calcul de traitement de signal, qu'une onde aussi monochromatique qu'elle soit est composée de plusieurs ondes de fréquences très proches.

Pour **un milieu non dispersif** (où v_φ ne dépend pas de la fréquence) : toutes les composantes de l'onde totale se propagent à la même vitesse de phase et l'ensemble se propage à la vitesse de groupe v_g tel que $v_g = v_\varphi$.

Pour **un milieu dispersif** : toutes les composantes de l'onde se déplacent chacune à une vitesse de phase, et l'ensemble se propage à v_g

b) Calcul de v_g

On trouve $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

Pour trouver l'expression de la vitesse de groupe, c'est plus simple de superposer deux ondes de fréquences très proches que de faire l'inverse. On interfère donc deux ondes, de même amplitude E_0, de fréquences très proches ω et $\omega + d\,\omega$, et de nombres d'onde très proches k et k + dk. On trouve un champ électrique sous forme d'un produit de deux fonctions sinusoïdales :

$$E(x,t) = 2.E_0[\underbrace{\cos((k+dk)x-(\omega+d\omega)t)}_{(1)}].[\underbrace{\cos(\frac{dk}{2}x-\frac{d\omega}{2}t)}_{(2)}]$$

La fonction (1) se propage à la vitesse $V_\varphi = \omega/k$ et la fonction (2) représente l'enveloppe et elle se propage à la vitesse de groupe $V_g = d\omega/dk$.

Remarques

Dans le vide

La pulsation ω est linéaire avec le nombre d'onde k, par conséquent $v_g = v_\varphi = c$

Dans un milieu matériel :

Si $v_g \neq v_\varphi$, le milieu est dispersif (les ondes de pulsations différentes ne se propagent pas à la même vitesse)

Si $v_g = v_\varphi$, le milieu est non dispersif (les ondes de fréquences différentes se propagent toutes à la même vitesse)

3) Indice de réfraction du milieu

L'indice de réfraction du milieu est définit par :

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}_{\varphi}}$$

* Pour le vide :

$n = \frac{c}{\mathrm{v}_{\varphi}} = \frac{c}{c} = 1$ (pas de réfraction de la lumière dans le vide, celle-ci garde la même direction de propagation)

* Pour un milieu matériel quelconque :

Dans ce cas la vitesse de phase dépend de la fréquence et donc l'indice de réfraction aussi. Celui-ci aura comme expression :

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}_{\varphi}} = \frac{c}{\omega}.k$$

Sachant que la relation entre k et ω est donnée par l'équation de dispersion (*) et qui s'exprime par :

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon(\omega)}} \quad ; \quad \text{avec: } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}$$

Ce qui donne finalement :

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}} = n(\omega)$$

Dans ce cas l'onde change de direction lorsqu'elle passe de l'air à un milieu matériel d'indice n(ω), cette nouvelle direction varie selon la fréquence de l'onde. C'est ce qu'on appelle le phénomène de réfraction.